

Určitý integrál, nevlastní integrál

Připomeň definici určitého Newtonova integrálu, pro f spojitou

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_{x=a}^b = F(b) - F(a),$$

kde F je primitivní k f , tedy $\int f(x)dx = F(x)$.

Spočtěte

1. $\int_{-1}^2 x^2 + 2x dx$

3. $\int_0^{\pi} 2 - \cos x dx.$

2. $\int_{-1}^0 \frac{1}{3^x} dx.$

4. $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx.$

Substituční metoda pro určitý integrál

Je-li f spojitá na $\langle \alpha, \beta \rangle$, φ má spojitou nenulovou derivaci na $\langle a, b \rangle$, a $\varphi(\langle a, b \rangle) = \langle \alpha, \beta \rangle$ pak¹

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Metoda per partes pro určitý integrál

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_{x=a}^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx.$$

Spočtěte

5. $\int_0^1 x\sqrt{2-x^2} dx$

7. $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2} - \pi\right) dx.$

6. $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x dx.$

8. $\int_1^e \ln(x^2) dx.$

¹S úmluvou $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

Nevlastní integrál - zobecněný Newtonův

Je-li f spojitá na otevřeném intervalu (a, b) , $F' = f$, pak definujeme

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_{x=a}^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x),$$

má-li výraz vpravo smysl, tj. není-li typu $\infty - \infty$. Je-li hodnota konečná, říkáme, že integrál konverguje. Pokud aspoň jedna limita neexistuje, nebo je nekonečná, říkáme, že integrál diverguje.

Spočtěte

5. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

6. $\int_0^{\infty} 2^{1-2x} dx$.

7. Rozhodněte, zda konverguje integrál $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx$.