Newtonova metoda pro řešení nelineárních rovnic

1. Motivační příklad - Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x - \mathrm{e}^x - 2$, průsečík s osou x?

Newtonova metoda tečen pro řešení rovnice $f(x) = 0$, pojem separačního intervalu. Předpoklady metody pro spojitou funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$ s počáteční aproximací x_0

I. $f(a) \cdot f(b) < 0$

II. $f' \neq 0$ na intervalu (a, b)

III. $f'' \neq 0$ na intervalu $\langle a, b\rangle$

IV. $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Komentář k významu předpokladů. I+II - existence právě jednoho kořene v intervalu - separační interval,

III+IV - konvergence metody

Určete počet řešení rovnice, a určete separační interval pro nejmenší kladný z nich. Ověřte předpoklady Newtonovy metody a spočtěte první aproximaci řešení.

1. $x \cdot \ln x = 1$
2. $\mathrm{e}^{-x} - \sin x = 0$

Taylorův polynom

Bylo: Tečna $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ aproximuje funkci v okolí bodu x_0 pomocí lineární funkce. Chceme víc - aproximace polynomem n-tého řádu

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

1. Napište Taylorův polynom n-tého řádu dané funkce v daném bodě.
   (a) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1,\ n = 2$
   (b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x},\ x_0 = 0,\ n = 5$

(c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x,\ x_0 = 1,\ n = 3,\ f(1,1) = ?$

2. Sestavte Taylorův polynom funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ řádu $n = 3$ v bodě $x_0 = 1$. Spočtěte přibližně hodnotu $f(1,1)$.

3. Pomocí Taylorova polynomu 2. řádu ve vhodném bodě aproximujte hodnotu

   (a) $\mathrm{arccotg}(0,1)$

   (b) $\sqrt{0,9}$

4. Aproximujte hodnotu $\sqrt{2}$

   (a) pomocí Taylorova polynomu

   (b) pomocí Newtonovy metody

Diferenciál

1. Napište diferenciál funkce v bodě x_0.

   (a) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$

   (b) $f(x) = x \cdot \arcsin x\ x_0 \in (-1, 1)$.

2. Aproximujte pomocí diferenciálu funkce 2^{-x} v bodě 1 hodnotu $2^{-1,2}$, načrtněte graf funkce, do obrázku vyznačte diferenci i diferenciál.