Cvičení 11 - Vyšetřování průběhu funkcí

Určete paritu funkcí. (To znamená, zda nejsou náhodou sudé, či liché.)

6. $f(x) = 2^x - 2^{-x}$
7. $f(x) = \sqrt{x} - x^2$
8. $f(x) = x^2 \cos x$
9. $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^3$
10. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
11. $f(x) = |x|$

12.* $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

Připomeň známé periodické goniometrické funkce:
$\sin, \cos$ jsou 2π-periodické, $\operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$ jsou π-periodické.

Určete primitivní periodu funkcí

13. $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{x}{3}) = \operatorname{tg}(\frac{x}{3} + \pi) = \operatorname{tg}(\frac{x+3\pi}{3}) = f(x + 3\pi)$
14. $f(x) = \cos(4x)$

15.* Funkce $f(x) = \sin(|x|)$ není periodická.

Vyšetřete průběh funkce

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$
2. $f(x) = 2x\sqrt{x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}$

1. Načrtněte graf nějaké funkce f takové, že
   (a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, f je lichá, f je prostá a $f'(1) = +\infty$.
   (b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(0) = 2$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$. Je f spojitá?

(c) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, f je sudá, f nemá derivaci v bodě $x = 0$, $f' > 0$ na intervalu $(-\infty, -1)$ a $f(0) = -2$.

(d) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, f je lichá, $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

(e) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, f je spojitá, f je sudá, $f(0) = -2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$, f je rostoucí na intervalu $(3, +\infty)$.

(f) $\mathcal{D}_f = (-1, 1\rangle$, f je prostá, $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = -\infty$, $f(1) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$. (Je f spojitá?)

2. Spočtěte limitu, pokud existuje

(a) $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{tg} x}$

(b) $\lim\limits_{x \to \pi-} 3^{\operatorname{cotg} x}$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 - x^2}{|1 - x|}$

3. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x+1), & x \in (-\infty, -1), \\ 0, & x = -1, \\ \dfrac{x+1}{2x+4}, & x \in (-1, \infty). \end{cases}$