

Spojitosť a limity funkcí

Definice spojitosti a limity obrázekem.

Všechny funkce z Tabulky 1 vyjma funkce signum jsou spojité na svých definičních oborech. Součet spojitých spojitá, podobně pro součin a skládání.

1. Rozhodněte, zda je následující funkce spojitá na \mathbb{R} . Načrtněte si obrázek.

$$(a) f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - x^2 & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \in (-\infty, 0) \\ \sqrt[3]{x}, & x \in (0, 1) \\ \frac{1}{x+1} & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Určete limity, pokud existují. Pokud ne, určete alespoň jednostranné limity.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{\cos x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - \frac{1}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(\operatorname{arctg} x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \sin\left(\frac{\pi}{x^2 - 2}\right)$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ neexistuje

Hodnota je limitou, je-li funkce spojitou.

Poznámka o počítání s nekonečnem a nulou $\frac{1}{0^+} = \infty$, $\frac{\infty}{0^-} = -\infty$, $3 \cdot \infty - 2 = \infty$, $\frac{-5}{\infty} = 0$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2e^x}{x^2}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\ln(x^2)}$

8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{3 - x}$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{-x}}{x^3}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \operatorname{arctg} x$

14. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{\sin x}$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_{\frac{1}{3}} x}{\operatorname{arccotg} x}$

15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} \sqrt{1 + x^2}$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin(1 - e^x)$

16. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$

Zpět k určování \mathcal{H}_f : Je-li f SPOJITÁ a PROSTÁ funkce NA INTERVALU I s krajními body a, b pak $f(I)$ je interval s krajními body $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, resp. $f(a)$, případně $f(b)$.

Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$17. f(x) = \sqrt{2 - \log_3 x}$$

$$19. f(x) = \arcsin(e^{2-x})$$

$$18. f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$$

$$20. f(x) = \frac{\pi^2}{\pi + \operatorname{arctg} x}$$

Určete limity, pokud existují, návod - upravte funkci

$$21. \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2$$

$$25. \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - 4^x$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - x^2}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9 - x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 25}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 3x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{x^2} \text{ (neex.)}$$

Pomocí Lemmatu o policajtech dokažte, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.