Cvičení 3 - Vlastnosti funkcí

Určete přirozený $\mathcal{D}_f$, načrtněte graf funkce, z obrázku určete základní vlastnosti funkcí včetně $\mathcal{H}_f$.

1. $f(x) = \dfrac{1-x}{x+2}$ *($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, prostá, není monotónní, $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ neomezená, ani-ani-ani)*

2. $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ *($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, je prostá, rostoucí, $\mathcal{H}_f = (-\infty, 1)$ omezená shora, neomezená, ani-ani-ani)*

3. $f(x) = \cos x + 1$ *($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ani prostá ani monotónní, $\mathcal{H}_f = \langle 0, 2\rangle$ omezená, sudá, 2π-period.)*

4. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x < 0 \\ \log 100, & x \geqslant 0 \end{cases}$ *($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, není prostá, je nekles., $\mathcal{H}_f = (0,1) \cup 2$ omez., ani-ani-ani)*

Načrtněte graf (nějaké) funkce takové, že

5. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, f je sudá, 2-periodická a $f(x) = x^2$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$.

6. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_f = (-\infty, 2) \cup \{3\}$, f je nerostoucí.

7. $\mathcal{D}_f = \langle -1, 1\rangle$, f je lichá, $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$, f není monotónní

Složené funkce

Připomeň definici $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$

8. Buď $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = x + \pi$. Najděte funkční předpisy a definiční obory funkcí $g \circ f$, $f \circ g$, $g \circ h$, $f \circ h$, $g \circ f \circ h$, ...

Naopak: $f(x) = \sqrt{1 - \log^2(x+1)}$
$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = (\log(x)),\ f_3(x) = 1 - x^2,\ f_4(x) = \sqrt{x}$

Důvod, proč to děláme: Některé vlastnosti složené funkce lze odvodit z vlastností (jednodušších) funkcí, z nichž je složena - prostota, parita, monotonie $\mathcal{H}_f$.

Zapište následující funkce jako složené

9. $f(x) = \frac{\mathrm{tg}(x+\pi)}{4} + 2$
10. $f(x) = 1 - 2^{\sin x}$

Určete definiční obor a obor hodnot pro následující složené funkce.

11. $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x-1}}$
12. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+3}{x+2}}$
13. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 + x^2}}$
14. $f(x) = \log_2\Big(\dfrac{3 + \sin x}{2}\Big)$
15. $f(x) = \dfrac{1}{2 - \sqrt{x}}$
16. $f(x) = \pi - \mathrm{arccotg}(x)$
17. $f(x) = \ln\big(\mathrm{arctg}(1 - 2x)\big)$
18. $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2} - \sqrt{x})$

Inverzní funkce

Je-li f PROSTÁ, pak existuje funkce k ní inverzní f^{-1} tž. $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{H}_f$, $\mathcal{H}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$ a

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y).$$

Tedy $(f \circ f^{-1})(x) = x$, pro všechna $x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ a $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, pro všechna $x \in \mathcal{D}_f$.

Připomeň dvojice vzájemně inverzních funkcí: x^3 a $\sqrt[3]{x}$, $\ln(x)$ a e^x, $x^2|_{\langle 0,\infty)}$ a $\sqrt{x}$

Určení prostoty:

a) Z obrázku - zvláště u po částech zadaných.

b) Z definice.

c) Funkce složená z prostých funkcí je prostá.

Rozhodněte, zda k dané funkci existuje funkce inverzní, v kladném případě určete její předpis a definiční obor.

6. $f(x) = 2x + 3$
7. $f(x) = 1 + \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
8. $f(x) = 10^{x^2} + 1,\ x \in (-\infty, 0\rangle$
9. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x+1}$
10. $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x-1}}$, byl $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{H}_f$
11. $f(x) = \log\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$
12. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{x-3}\right)$
13. $f(x) = \ln\big(\mathrm{arctg}(1-2x)\big)$
14. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x \geqslant 0 \end{cases}$
15. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x \in \langle 1, \infty) \\ -x^2, & x \in (0,1) \\ \sqrt[3]{x} - 1 & x \in (-\infty, 0\rangle \end{cases}$
16.* $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} x - 1}{\log_{\frac{1}{3}} x - 2}}$
17. $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2} - \sqrt{x})$
18. $f(x) = \log_2\big(1 + \frac{2}{\pi}\arcsin x\big)$

Funkce $y = x^3$, $y = 2 - x$ či $y = x$ jsou na svých přirozených definičních oborech prosté, ale POZOR! Ani jedna z následujících funkcí není prostá, speciálně není *složená* z prostých funkcí

$$f_1(x) = \begin{cases} x^3, & x \geqslant 0 \\ 2 - x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \frac{x^3}{x},\ x \neq 0$$

$$f_3(x) = x^3 - x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = x \cdot x^3,\ x \in \mathbb{R}$$