## 12. série

1. Ověřte, že funkce $U(x,y) = 3y\sqrt[3]{x} + 2x\sqrt{y^2+1}$ je v oblasti $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ potenciálem vektorového pole

$$\vec{F}(x,y) = \left( \frac{2\sqrt{y^2+1}\sqrt[3]{x^2} + y}{\sqrt[3]{x^2}},\ \frac{2xy + 3\sqrt{y^2+1}\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y^2+1}} \right).$$

Pomocí potenciálu $U$ spočtěte integrál $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $\mathcal{K}$ je oblouk $y = x^2 - 4x + 3$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$ orientovaný souhlasně s rostoucím $x$.

2. Ověřte, že je dané pole $\vec{F}$ potenciální a určete jeho potenciál $U$ tak, aby hodnota potenciálu v počátku byla 1.

   (a) $\vec{F}(x,y) = \left( \frac{2x(1-\mathrm{e}^y)}{(1+x^2)^2},\ \frac{\mathrm{e}^y}{1+x^2} \right)$,

   (b) $\vec{F}(x,y,z) = (2xy, x^2, -\frac{1}{1+z^2})$.

   (c) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2 + 2xz^2,\ 2xy - 1,\ 2x^2z + z^3)$.

3. Vektorové pole $\vec{F}(x,y,z)$ je dáno diferenciální formou

$$-y\mathrm{d}x + (\frac{1}{y} - x)\mathrm{d}y + 2z\mathrm{d}z.$$

Má $\vec{F}$ potenciál na oblasti $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y > 0\}$?

Určete $\int_{\mathcal{C}} -y\mathrm{d}x + (\frac{1}{y} - x)\mathrm{d}y + 2z\mathrm{d}z$, pro $\mathcal{C}$ danou parametrickými rovnicemi

$$x = 1 + \cos t, \qquad y = 2 + \cos t, \qquad z = 5\sin t, \qquad t \in \langle 0, 4\pi \rangle.$$

4. Vypočtěte

$$\int_{\mathcal{K}} (x-z)\mathrm{d}x + (1-xy)\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z\,,$$

kde křivka $\mathcal{K}$ je dána parametrickými rovnicemi

$x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, a je orientovaná souhlasně s parametrizací.